

TD₆ – Suites et Séries**Exercices à préparer**

Exercice 1 ★★★

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $[0, 1]$ par : $P_n : x \mapsto x^n - (1-x)a$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.
3. Notons ℓ la limite de la suite (x_n) . Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 2 ★★

Pour $n \geq 1$, soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2 - 1}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge
3. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \geq 1, \frac{k}{4k^2 - 1} = \frac{a}{2k + 1} + \frac{b}{2k - 1}$.
4. En déduire la somme de la série $\sum u_n$